CAPES externe 1980 composition 2

avec solution

Deuxième composition de mathématiques.

$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

P est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O. On utilisera la bijection de P sur $\mathbb{C}$ définie par M de coordonnées $(x, y) \longmapsto x + iy$. On note M($z$) le point de P qui a pour affixe z. I est le point de coordonnées (1, 0).

n est un entier naturel non nul.

On appelle « n-point » de P toute famille $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de points de P vérifiant : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+n} = M_k$. Un tel n-point est noté $(M_1, \ldots, M_n)$, ou $\mathfrak{M}$ s'il n'y a pas ambiguïté.

On appelle « côté d'un n-point » le segment joignant deux points consécutifs M_k et M_{k+1}. On dira qu'un n-point est réduit à un point si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_k = M_1$.

On dit que deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont équivalents s'il existe un entier h tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+h} = N_k$. Les classes d'équivalence sont appelées des « n-gones ».

Les seules similitudes envisagées dans le problème sont des *similitudes directes*. Deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont dits semblables s'il existe une similitude H telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $H(M_k) = N_k$. Deux n-gones sont semblables s'ils admettent des représentants semblables.

$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ est la racine n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ d'argument $\frac{2\pi}{n}$. Pour $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on appelle Ω_p le n-point $(W_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ où W_k^p est le point d'affixe ω^{pk}. Un n-gone est dit régulier de « type ω^p » s'il est semblable à Ω_p ou s'il est réduit à un point.

A tout nombre complexe a, *différent de* 1, on associe une *transformation polygonale d'ordre n*, S_a, définie de la manière suivante : à tout n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ correspond le n-point $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N} = (N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout k, le 3-point (M_k, M_{k+1}, N_k) soit réduit à un point, ou semblable au 3-point (A, I, O). A est le point d'affixe a et I est le point d'affixe 1.

I

1.1. $\mathfrak{M} = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ étant un n-point et $\mathfrak{N} = (N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ son image par la transformation polygonale S_a, $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$, on note z_k l'affixe de M_k et z'_k l'affixe de N_k. Montrer que l'on a $\forall k \in \mathbb{Z}$, $z'_k = \dfrac{z_k - az_{k+1}}{1-a}$.

1.2. a et b étant deux nombres complexes différents de 1, montrer que les deux transformations polygonales S_a et S_b commutent, c'est-à-dire que l'on a $S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$.

1.3. Si $\mathfrak{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ est un n-point, on appelle « centre de gravité de $\mathfrak{M}$ » l'isobarycentre des points $M_1, \ldots, M_n$. Montrer que le centre de gravité de $\mathfrak{N} = S_a(\mathfrak{M})$ est le même que celui de $\mathfrak{M}$.

II

Dans toute cette partie n est fixé égal à 3.

Un 3-point régulier est dit « équilatéral ».

ω est noté $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

2.1. Soit $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ trois points de P. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes z_1, z_2, z_3 pour que le 3-point (M_1, M_2, M_3) soit équilatéral de type $\omega = j$, puis pour qu'il soit équilatéral de type j^2.

2.2. On suppose que a n'est pas une racine cubique de l'unité ; montrer que la transformation polygonale d'ordre 3, S_a, est une bijection de l'ensemble des 3-points sur lui-même et qu'elle induit une bijection de l'ensemble des 3-points équilatéraux sur lui-même.

2.3. Dans cette question, on prend $a = i$ et les trois points B, C, D d'affixes respectives 0, 4 et $4 + 2i$. Effectuer à la règle et au compas les constructions de similitude permettant de tracer l'image du 3-point (B, C, D) par S_i (on aura soin de faire apparaître clairement sur la figure les côtés du 3-point (B, C, D) et les côtés de son image par S_i).

2.4. Dans cette question, on prend a racine cubique de l'unité.

Montrer que l'image par S_a de tout 3-point est un 3-point équilatéral et préciser suivant les cas le type de ce 3-point équilatéral.

Montrer que l'image par S_a d'un 3-point équilatéral de type a^2 est un 3-point réduit à un point. Quel est ce point ?

2.5. a est encore une racine cubique de l'unité et $\mathfrak{N} = (N_1, N_2, N_3)$ est un 3-point équilatéral de type a. Montrer que pour tout point M_1 de P il existe $\mathfrak{M} = (M_1, M_2, M_3)$ tel que $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$. Décrire géométriquement la construction de M_2 et M_3 à partir de $\mathfrak{N}$ et de M_1 ; faire la figure.

Construire l'image par S_j du 3-point (B, C, D) défini en **2.3.** sur un nouveau dessin.

2.6. a est de nouveau un nombre complexe quelconque (mais différent de 1). Déterminer l'ensemble Γ des points M de P tels que l'image par S_a du 3-point (A, I, M) soit un 3-point formé de points alignés (c'est-à-dire qu'il existe une droite du plan contenant les trois points N_1, N_2 et N_3). Montrer que cet ensemble contient, si $a \neq 0$, les points $A_1(-1-a)$, $A_2(a^2)$ et $A_3\left(\frac{1}{a}\right)$. Caractériser géométriquement cet ensemble à l'aide des points A_1, A_2 et A_3. Étudier le cas $a = 0$.

III

n est un entier non nul quelconque.

$(u_1, \ldots, u_n)$ étant un élément *non nul* de $\mathbb{C}^n$, on dit qu'un n-point $\mathfrak{M}$ vérifie la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ si les affixes z_k des points M_k de $\mathfrak{M}$ vérifient

$$u_1 z_1 + \cdots + u_n z_n = 0.$$

On dit que la relation U est *adaptée* si elle satisfait à la condition suivante : si $\mathfrak{M}$ vérifie U et si $\mathfrak{M}'$ est semblable à $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{M}'$ vérifie U.

On dit que la relation U est *polygonale d'ordre n* si à la fois :

(i) elle est adaptée ;

(ii) elle est telle que si un n-point vérifie la relation U, tout n-point équivalent vérifie aussi la relation U.

3.1. Montrer que la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ est adaptée si, et seulement si, $u_1 + \cdots + u_n = 0$.

3.2. Montrer que la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ est polygonale si, et seulement si, il existe un entier p et un nombre complexe λ non nul tels que

$$1 \leqslant p \leqslant n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_k = \lambda \omega^{p(k-1)}.$$

Montrer que dans ce cas un n-point vérifie la relation U si, et seulement si, il vérifie la relation U_p définie par $(1, \omega^p, \omega^{2p}, \ldots, \omega^{(n-1)p})$.

Déterminer les relations polygonales d'ordre 2, 3 ou 4 et décrire les propriétés géométriques qu'elles traduisent pour un 2-point, un 3-point ou un 4-point.

3.3. Montrer qu'un n-point qui satisfait aux $n-1$ relations U_p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, définies en **3.2.** est réduit à un point.

3.4. k étant un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, montrer qu'un n-point qui satisfait à toutes les relations U_p sauf à la relation U_k est un n-point régulier de type ω^{n-k}.

IV

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Montrer que S_a est une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même si $a^n \neq 1$.

Dans les questions qui suivent, p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

4.2. Montrer que si un n-point satisfait à la relation U_p (définie en **3.2.**) son image par la transformation polygonale d'ordre n, S_a, vérifie aussi cette relation.

4.3. Montrer que pour tout n-point $\mathfrak{M}$, le n-point $S_{\omega^p}(\mathfrak{M})$ vérifie la relation U_p.

On donne un n-point $\mathfrak{N}$ vérifiant la relation U_p. Montrer qu'il existe un n-point $\mathfrak{M}$ tel que $S_{\omega^p}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$.

4.4. Montrer que si $a \neq \omega^p$, et si un n-point $\mathfrak{M}$ ne vérifie pas la relation U_p alors le n-point $S_a(\mathfrak{M})$ ne vérifie pas non plus la relation U_p.

4.5. Faire une étude complète de la transformation polygonale d'ordre n, S_{-1}.

4.6. On considère les $n-1$ transformations polygonales d'ordre n : $S_\omega, S_{\omega^2}, \ldots, S_{\omega^{n-1}}$. Montrer que l'image de tout n-point par la composée de ces $n-1$ transformations est réduite à un point. Montrer que l'image de tout n-point par la composée de $n-2$ transformations polygonales distinctes choisies parmi celles-ci est un n-point régulier dont on précisera le type.

V

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

p est un entier naturel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des réels vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\alpha_1 \neq 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 1.$$

$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ désigne l'application de l'ensemble des n-points dans lui-même qui transforme le n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en le n-point $\mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de telle façon que pour tout k le point N_k est le barycentre de la famille de points $(M_k, \ldots, M_{k+p-1})$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

5.1. Si $p = 2$, montrer que toute application $T(\alpha_1, \alpha_2)$ est une transformation polygonale d'ordre n que l'on précisera.

5.2. Si $p = 3$, montrer que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la composée des deux transformations polygonales S_a et S_b où a et b désignent les racines (éventuellement confondues) du trinôme $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_3$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ soit une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même.

Pour quelles valeurs de n l'application $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est-elle bijective ? Lorsqu'elle n'est pas bijective, caractériser les n-points appartenant à son image.

5.3. Si p est quelconque, $2 \leqslant p \leqslant n$, et sachant que le polynôme $P(X) = \alpha_1 X^{p-1} + \alpha_2 X^{p-2} + \cdots + \alpha_p$ est factorisé par la formule $P(X) = \alpha_1 (X - a_1) \ldots (X - a_{p-1})$, $(a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$, démontrer que

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = S_{a_1} \circ S_{a_2} \circ \ldots \circ S_{a_{p-1}}.$$

Discuter du caractère bijectif ou non de $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et plus particulièrement du caractère bijectif de $T\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$.

Deuxième composition de mathématiques.

$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

P est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O. On utilisera la bijection de P sur $\mathbb{C}$ définie par M de coordonnées $(x, y) \longmapsto x + iy$. On note M(z) le point de P qui a pour affixe z. I est le point de coordonnées (1, 0).

n est un entier naturel non nul.

On appelle « n-point » de P toute famille $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de points de P vérifiant : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+n} = M_k$. Un tel n-point est noté $(M_1, \ldots, M_n)$, ou $\mathfrak{M}$ s'il n'y a pas ambiguïté.

On appelle « côté d'un n-point » le segment joignant deux points consécutifs M_k et M_{k+1}. On dira qu'un n-point est réduit à un point si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_k = M_1$.

On dit que deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont équivalents s'il existe un entier h tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+h} = N_k$. Les classes d'équivalence sont appelées des « n-gones ».

Les seules similitudes envisagées dans le problème sont des *similitudes directes*. Deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont dits semblables s'il existe une similitude H telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $H(M_k) = N_k$. Deux n-gones sont semblables s'ils admettent des représentants semblables.

$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ est la racine n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ d'argument $\frac{2\pi}{n}$. Pour $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on appelle Ω_p le n-point $(W_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ où W_k^p est le point d'affixe ω^{pk}. Un n-gone est dit régulier de « type ω^p » s'il est semblable à Ω_p ou s'il est réduit à un point.

A tout nombre complexe a, *différent de* 1, on associe une *transformation polygonale d'ordre n*, S_a, définie de la manière suivante : à tout n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ correspond le n-point $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N} = (N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout k, le 3-point (M_k, M_{k+1}, N_k) soit réduit à un point, ou semblable au 3-point (A, I, O). A est le point d'affixe a et I est le point d'affixe 1.

I

1.1. $\mathfrak{M} = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ étant un n-point et $\mathfrak{N} = (N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ son image par la transformation polygonale S_a, $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$, on note z_k l'affixe de M_k et z'_k l'affixe de N_k. Montrer que l'on a $\forall k \in \mathbb{Z}$, $z'_k = \frac{z_k - az_{k+1}}{1-a}$.

1.2. a et b étant deux nombres complexes différents de 1, montrer que les deux transformations polygonales S_a et S_b commutent, c'est-à-dire que l'on a $S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$.

1.3. Si $\mathfrak{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ est un n-point, on appelle « centre de gravité de $\mathfrak{M}$ » l'isobarycentre des points $M_1, \ldots, M_n$. Montrer que le centre de gravité de $\mathfrak{N} = S_a(\mathfrak{M})$ est le même que celui de $\mathfrak{M}$.

II

Dans toute cette partie n est fixé égal à 3.

Un 3-point régulier est dit « équilatéral ».

ω est noté $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

2.1. Soit $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ trois points de P. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes z_1, z_2, z_3 pour que le 3-point (M_1, M_2, M_3) soit équilatéral de type $\omega = j$, puis pour qu'il soit équilatéral de type j^2.

2.2. On suppose que a n'est pas une racine cubique de l'unité ; montrer que la transformation polygonale d'ordre 3, S_a, est une bijection de l'ensemble des 3-points sur lui-même et qu'elle induit une bijection de l'ensemble des 3-points équilatéraux sur lui-même.

2.3. Dans cette question, on prend $a = i$ et les trois points B, C, D d'affixes respectives 0, 4 et $4 + 2i$. Effectuer à la règle et au compas les constructions de similitude permettant de tracer l'image du 3-point (B, C, D) par S_i (on aura soin de faire apparaître clairement sur la figure les côtés du 3-point (B, C, D) et les côtés de son image par S_i).

2.4. Dans cette question, on prend a racine cubique de l'unité.

Montrer que l'image par S_a de tout 3-point est un 3-point équilatéral et préciser suivant les cas le type de ce 3-point équilatéral.

Montrer que l'image par S_a d'un 3-point équilatéral de type a^2 est un 3-point réduit à un point. Quel est ce point ?

2.5. a est encore une racine cubique de l'unité et $\mathfrak{N} = (N_1, N_2, N_3)$ est un 3-point équilatéral de type a. Montrer que pour tout point M_1 de P il existe $\mathfrak{M} = (M_1, M_2, M_3)$ tel que $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$. Décrire géométriquement la construction de M_2 et M_3 à partir de $\mathfrak{N}$ et de M_1 ; faire la figure.

Construire l'image par S_j du 3-point (B, C, D) défini en **2.3.** sur un nouveau dessin.

2.6. a est de nouveau un nombre complexe quelconque (mais différent de 1). Déterminer l'ensemble Γ des points M de P tels que l'image par S_a du 3-point (A, I, M) soit un 3-point formé de points alignés (c'est-à-dire qu'il existe une droite du plan contenant les trois points N_1, N_2 et N_3). Montrer que cet ensemble contient, si $a \neq 0$, les points $A_1(-1-a)$, $A_2(a^2)$ et $A_3\left(\frac{1}{a}\right)$. Caractériser géométriquement cet ensemble à l'aide des points A_1, A_2 et A_3. Étudier le cas $a = 0$.

III

n est un entier non nul quelconque.

$(u_1, \ldots, u_n)$ étant un élément *non nul* de $\mathbb{C}^n$, on dit qu'un n-point $\mathfrak{M}$ vérifie la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ si les affixes z_k des points M_k de $\mathfrak{M}$ vérifient

$$u_1 z_1 + \cdots + u_n z_n = 0.$$

On dit que la relation U est *adaptée* si elle satisfait à la condition suivante : si $\mathfrak{M}$ vérifie U et si $\mathfrak{M}'$ est semblable à $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{M}'$ vérifie U.

On dit que la relation U est *polygonale d'ordre n* si à la fois :

(i) elle est adaptée ;

(ii) elle est telle que si un n-point vérifie la relation U, tout n-point équivalent vérifie aussi la relation U.

3.1. Montrer que la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ est adaptée si, et seulement si, $u_1 + \cdots + u_n = 0$.

3.2. Montrer que la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ est polygonale si, et seulement si, il existe un entier p et un nombre complexe λ non nul tels que

$$1 \leqslant p \leqslant n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_k = \lambda \omega^{p(k-1)}.$$

Montrer que dans ce cas un n-point vérifie la relation U si, et seulement si, il vérifie la relation U_p définie par $(1, \omega^p, \omega^{2p}, \ldots, \omega^{(n-1)p})$.

Déterminer les relations polygonales d'ordre 2, 3 ou 4 et décrire les propriétés géométriques qu'elles traduisent pour un 2-point, un 3-point ou un 4-point.

3.3. Montrer qu'un n-point qui satisfait aux $n-1$ relations U_p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, définies en **3.2.** est réduit à un point.

3.4. k étant un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, montrer qu'un n-point qui satisfait à toutes les relations U_p sauf à la relation U_k est un n-point régulier de type ω^{n-k}.

IV

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Montrer que S_a est une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même si $a^n \neq 1$.

Dans les questions qui suivent, p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

4.2. Montrer que si un n-point satisfait à la relation U_p (définie en **3.2.**) son image par la transformation polygonale d'ordre n, S_a, vérifie aussi cette relation.

4.3. Montrer que pour tout n-point $\mathfrak{M}$, le n-point $S_{\omega^p}(\mathfrak{M})$ vérifie la relation U_p.

On donne un n-point $\mathfrak{N}$ vérifiant la relation U_p. Montrer qu'il existe un n-point $\mathfrak{M}$ tel que $S_{\omega^p}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$.

4.4. Montrer que si $a \neq \omega^p$, et si un n-point $\mathfrak{M}$ ne vérifie pas la relation U_p alors le n-point $S_a(\mathfrak{M})$ ne vérifie pas non plus la relation U_p.

4.5. Faire une étude complète de la transformation polygonale d'ordre n, S_{-1}.

4.6. On considère les $n-1$ transformations polygonales d'ordre n : $S_\omega, S_{\omega^2}, \ldots, S_{\omega^{n-1}}$. Montrer que l'image de tout n-point par la composée de ces $n-1$ transformations est réduite à un point. Montrer que l'image de tout n-point par la composée de $n-2$ transformations polygonales distinctes choisies parmi celles-ci est un n-point régulier dont on précisera le type.

V

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

p est un entier naturel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des réels vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\alpha_1 \neq 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 1.$$

$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ désigne l'application de l'ensemble des n-points dans lui-même qui transforme le n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en le n-point $\mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de telle façon que pour tout k le point N_k est le barycentre de la famille de points $(M_k, \ldots, M_{k+p-1})$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

5.1. Si $p = 2$, montrer que toute application $T(\alpha_1, \alpha_2)$ est une transformation polygonale d'ordre n que l'on précisera.

5.2. Si $p = 3$, montrer que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la composée des deux transformations polygonales S_a et S_b où a et b désignent les racines (éventuellement confondues) du trinôme $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_3$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ soit une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même.

Pour quelles valeurs de n l'application $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est-elle bijective ? Lorsqu'elle n'est pas bijective, caractériser les n-points appartenant à son image.

5.3. Si p est quelconque, $2 \leqslant p \leqslant n$, et sachant que le polynôme $P(X) = \alpha_1 X^{p-1} + \alpha_2 X^{p-2} + \cdots + \alpha_p$ est factorisé par la formule $P(X) = \alpha_1 (X - a_1) \ldots (X - a_{p-1})$, $(a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$, démontrer que

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = S_{a_1} \circ S_{a_2} \circ \ldots \circ S_{a_{p-1}}.$$

Discuter du caractère bijectif ou non de $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et plus particulièrement du caractère bijectif de $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

I.1.1 $S_a(M)=N \quad M_k(z_k) \quad N_k(z'_k)$

Si $M_k \neq M_{k+1}$, (M_k, M_{k+1}, N_k) semblable à (A, I, O) signifie qu'il existe une similitude directe s telle que $\begin{cases} s(A)=M_k \\ s(I)=M_{k+1} \\ s(O)=N_k \end{cases}$. Comme $s(z)=\alpha z+\beta$, on aura :

$$\begin{cases} \alpha a+\beta = z_k \\ \alpha+\beta = z_{k+1} \\ \beta = z'_k \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\begin{vmatrix} a & z_k \\ 1 & z_{k+1} \end{vmatrix}}{a-1} \quad \text{ainsi} \quad z'_k = \frac{a z_{k+1} - z_k}{a-1} \qquad (a \neq 1)$$

$$\boxed{z'_k = \frac{z_k - a z_{k+1}}{1-a}}$$

1.2 $S_b(z_k) = \dfrac{z_k - b z_{k+1}}{1-b}$. Il suffit de vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad S_a \circ S_b(z_k) = S_b \circ S_a(z_k)$

ie $$\frac{S_b(z_k) - a S_b(z_{k+1})}{1-a} = \frac{S_a(z_k) - b S_a(z_{k+1})}{1-b} \qquad (1)$$

On a : $$S_b(z_k) - a S_b(z_{k+1}) = \frac{z_k - b z_{k+1} - a(z_{k+1} - b z_{k+2})}{1-b}$$

et $(1) \Leftrightarrow z_k - b z_{k+1} - a(z_{k+1} - b z_{k+2}) = z_k - a z_{k+1} - b(z_{k+1} - a z_{k+2})$ vrai.

1.3 Evident car toute similitude conserve le barycentre. D'ailleurs : si z (resp. z') est l'affixe du cdg de M (resp. $M' = S_a(M)$), on a :

$$z' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z'_k = \frac{1}{n(1-a)} \sum_{k=1}^{n} (z_k - a z_{k+1}) = \frac{1}{n(1-a)} \left(z_1 + (1-a) z_2 + \dots + (1-a) z_n - a z_{n+1} \right)$$

Comme $z_{n+1} = z_n$ par hyp., on trouve : $z' = \dfrac{1}{n(1-a)} \left(\sum_{k=1}^{n} (1-a) z_k \right) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k = z$.

II.2.1

(M_1, M_2, M_3) sera équilatéral de type $\omega = j$ si (M_1, M_2, M_3) est semblable à $\Omega_1 = (j, j^2, 1)$

- ie ssi $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} \alpha j + \beta = z_1 \\ \alpha j^2 + \beta = z_2 \\ \alpha + \beta = z_3 \end{cases}$

Ces 3 équations forment un système de rang 2 car $\begin{vmatrix} j & 1 \\ j^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. La condition de compatibilité est donc : $\begin{vmatrix} j & 1 & z_1 \\ j^2 & 1 & z_2 \\ 1 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1(j^2-1) - z_2(j-1) + z_3(j-j^2) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0$

* De même, (M_1, M_2, M_3) sera équilatéral de type j^2 ssi $z_1 + j^2 z_2 + j z_3 = 0$

NB : S'il n'est pas réduit à un pt, le 3-point équilatéral j (resp. j^2) correspond à un triangle équilatéral "direct" (resp. "indirect").

2.2 Du 1.1, on a en fait montré que $S_a(M) = \mathcal{N}$ ssi $z'_k = \dfrac{z_k - a z_{k+1}}{1-a}$ $\forall k$, cette relation étant la condition de compatibilité du système de rang 2 $\begin{cases} \alpha a + \beta = z_k \\ \alpha + \beta = z_{k+1} \\ \beta = z'_k \end{cases}$.

Donnons-nous $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$ et cherchons $\mathcal{M} = (M_1, M_2, M_3)$ tel que $S_a(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$.
Cela revient à chercher z_1, z_2, z_3 en fct de z'_1, z'_2, z'_3 vérifiant :

$$\begin{cases} z_1 - a z_2 = (1-a) z'_1 \\ z_2 - a z_3 = (1-a) z'_2 \\ z_3 - a z_1 = (1-a) z'_3 \end{cases}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^3 \neq 0$, ce système est de Cramer et admet un et un seul 3-uplet solution : S_a est bien bijective.

* $\mathcal{N}$ est un 3-points équilatéral $\Leftrightarrow z'_1 + j z'_2 + j^2 z'_3 = 0$

$\Leftrightarrow z_1 - a z_2 + j(z_2 - a z_3) + j^2 (z_3 - a z_1) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 + j z_2 + j^2 z_3 - a(z_2 + j z_3 + j^2 z_1) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 + j z_2 + j^2 z_3 - a j^2 (z_1 + j z_2 + j^2 z_3) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}$ est un 3-pts équil.

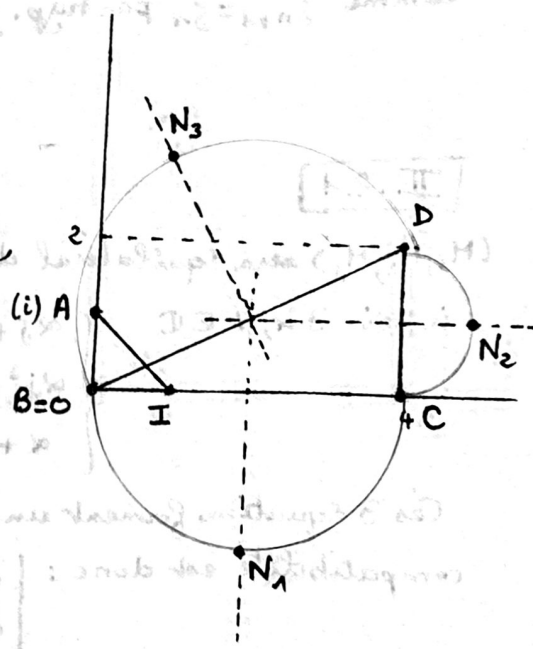
S_a induit bien une bijection entre les 3-pts équilatéraux.

2.3 B(0) C(4) D(4+2i)

$(B, C, D) \xrightarrow{S_i} (N_1, N_2, N_3)$

Il existe une similitude transformant (A, I, O) en (M_k, M_{k+1}, N_k), soit : (A, I, O) en (B, C, N_1)
(A, I, O) en (C, D, N_2)
(A, I, O) en (D, B, N_3)

AIO est rectangle isocèle en O, donc BCN_1 sera rectangle isocèle en N_1. De plus, la sim. directe conservant les angles, $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO}$ ira dans le même sens que $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN_1}$ (sens indirect)



2.4 * Soit $\omega = j$ ou j^2. Soit (N_1, N_2, N_3) l'image de (M_1, M_2, M_3) par S_a.
(N_1, N_2, N_3) sera équilatéral de type j ssi $z'_1 + j z'_2 + j^2 z'_3 = 0$

$$z_1 - \omega z_2 + j(z_2 - \omega z_3) + j^2(z_3 - \omega z_1) = 0$$
$$(1 - \omega j^2) z_1 + (j - \omega) z_2 + (j^2 - \omega j) z_3 = 0$$

Si $\omega = j = a$, l'image de tout 3-point sera équilatéral de type j.
De même, si $\omega = j^2 = a$, " " " de type j^2.

* Si $a = j$ ou j^2 et si (M_1, M_2, M_3) est équilatéral de type a^2, on a $z_1 + a^2 z_2 + a z_3 = 0$
et $S_a(M_1, M_2, M_3) = (N_1, N_2, N_3)$ vérifie :

$$z'_k = z'_{k+1} \iff \frac{z_k - a z_{k+1}}{1-a} = \frac{z_{k+1} - a z_{k+2}}{1-a} \iff z_k \overbrace{-(1+a)}^{a^2} z_{k+1} + a z_{k+2} = 0$$
$$\iff z_k + a^2 z_{k+1} + a z_{k+2} = 0 \text{ vrai}$$

(N_1, N_2, N_3) est donc réduit au point N_1 d'affixe $z'_1 = \frac{z_k - a z_{k+1}}{1-a}$, ie au pt

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{z_k - a z_{k+1}}{1-a} = \frac{1}{3(1-a)} (z_1 - a z_2 + z_2 - a z_3 + z_3 - a z_1) = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \text{isobarycentre de } (M_1, M_2, M_3).$$

2ème méthode : D'après 2.4 ci-dessus et 2.2, le transformé d'un 3-points équilatéral (M_1, M_2, M_3) de type a^2 par S_a est un 3-pt équilatéral à la fois du type a et a^2. Comme un triangle équilatéral ne peut être à la fois direct et indirect, ce transformé sera réduit à un point.
Ce point ne peut être que le cdg de (M_1, M_2, M_3) d'après 1.3.

2.5 * $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$ vérifie $z'_1 + a z'_2 + a^2 z'_3 = 0$ où $a^3 = 1$

$\forall M_1 \quad \exists \mathcal{M} = (M_1, M_2, M_3) \quad S_a(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$?

z_1, z'_1, z'_2, z'_3 sont connus. Il s'agit de voir s'il est possible de déterminer z_2, z_3 tels que : $z'_k = \frac{z_k - a z_{k+1}}{1-a} \quad \forall k \in \mathbb{N}_3$,

soit :
$$\begin{cases} z_1 - a z_2 = (1-a) z'_1 \\ z_2 - a z_3 = (1-a) z'_2 \\ z_3 - a z_1 = (1-a) z'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -a z_2 = -z_1 + (1-a) z'_1 \\ z_2 - a z_3 = (1-a) z'_2 \\ z_3 = a z_1 + (1-a) z'_3 \end{cases}$$

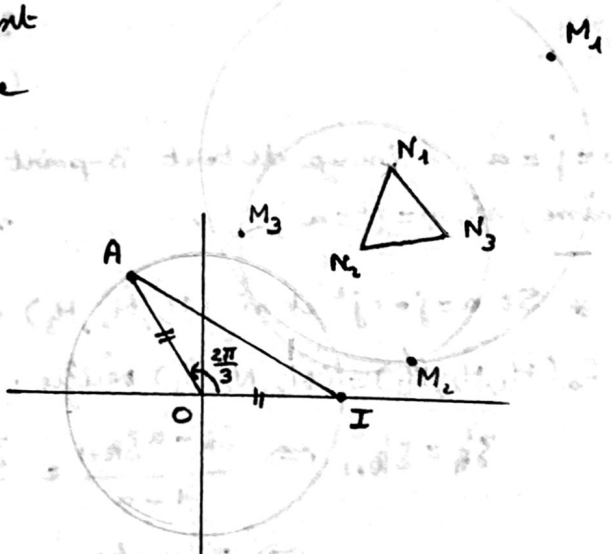
z_1, z_2 doivent être solution de ce système de rang 2 car $\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = a^2 \neq 0$.
La condition de compatibilité s'écrit :

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & -z_1 + (1-a) z'_1 \\ 1 & -a & (1-a) z'_2 \\ 0 & 1 & a z_1 + (1-a) z'_3 \end{vmatrix} = 0 \iff a(1-a) z'_2 - z_1 + (1-a) z'_1 + z_1 + a^2 (1-a) z'_3 = 0$$
$$\iff z'_1 + a z'_2 + a^2 z'_3 = 0 \text{ qui est satisfaite.}$$

* Construction de M_2 et M_3 vérifiant $S_a(M_1, M_2, M_3) = (N_1, N_2, N_3)$

((M_1, N_1, N_2, N_3) sont donnés)

Cas où $a = j$: Le triangle AIO est directement semblable aux triangles $M_k M_{k+1} N_k$. Comme AIO est isocèle en O et $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA} = \frac{2\pi}{3}$, on peut donc déduire : $M_k N_k = M_{k+1} N_k$ et $\overrightarrow{N_k M_{k+1}}, \overrightarrow{N_k M_k} = \frac{2\pi}{3}$.



Si $k = 1$:

$M_1 N_1 = M_2 N_1$ et $\overrightarrow{N_1 M_2}, \overrightarrow{N_1 M_1} = \frac{2\pi}{3}$

et on obtient la construction suivante :

M_2 appartient au cercle de centre N_1 et de rayon $M_1 N_1$

l'angle $\overrightarrow{N_1 M_2}, \overrightarrow{N_1 M_1}$ étant de mesure $\frac{2\pi}{3}$, on reportera 2 fois la distance $M_1 N_1$ sur ce cercle dans le sens indirect pour obtenir M_2 (cf. figure)

On recommence pour obtenir M_3 à partir de N_2 et M_2.

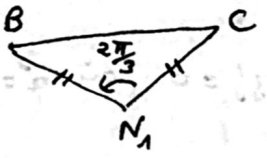
* Construction de $S_j(B, C, D) = (N_1, N_2, N_3)$:

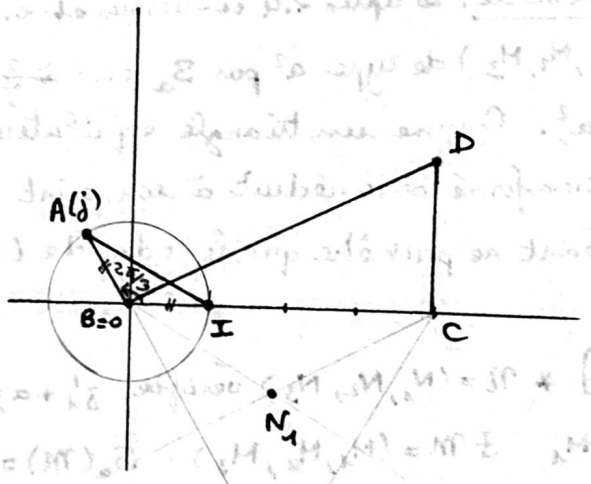
AIO doit être directement semblable à BCN_1

d'où :

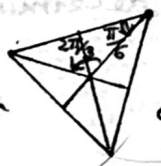
BCN_1 isocèle en N_1 et $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA} = \frac{2\pi}{3} = \overrightarrow{N_1 C}, \overrightarrow{N_1 B}$

et un triangle du style :





Le dessin suivant représentant un triangle équilatéral :



nous donne l'idée de construction de N_1 : On construira un triangle équilatéral CBT_1 direct sur le côté BC, puis les médiatrices des côtés de ce triangle. Ces médiatrices se coupent en N_1.

Et ainsi de suite (AIO étant aussi directement semblable aux triangles CDN_2 et DBN_3)

2.6 $a \neq 1$

$\Gamma = \{M \in P / S_a(A, I, M) = (N_1, N_2, N_3)$ et N_1, N_2, N_3 alignés$\}$

Les affixes de N_1, N_2, N_3 sont resp. $z'_1 = \frac{a-a}{1-a} = 0$; $z'_2 = \frac{1-az}{1-a}$ et $z'_3 = \frac{z-a^2}{1-a}$

et $\Gamma = \{M(z) / 0, \frac{1-az}{1-a}, \frac{z-a^2}{1-a}$ alignés$\}$

* Si $a=0$, Γ est la droite (OI).

* Si $a \neq 0$, on vérifie directement que les points $A_1(-1-a)$, $A_2(a^2)$, $A_3(\frac{1}{a})$ appartiennent bien à Γ.

Soit M un point de P distinct de A_2 et A_3 :

(*) $M \in \Gamma \Leftrightarrow \text{Arg} \frac{1-az}{1-a} \equiv \text{Arg} \frac{z-a^2}{1-a}$ $[\pi] \Leftrightarrow \text{Arg}(z-a^2) - \text{Arg}\left(z - \frac{1}{a}\right) \equiv \text{Arg}\, a$ $[\pi]$

d'où la discussion :

1) Si $a^2 = \frac{1}{a}$ ie $a = j$ ou j^2, (*) n'est jamais satisfaite et Γ sera réduit à $\{A_2\}$ (au passage : $A_1 = A_2 = A_3$)

2) Si $a^2 \neq \frac{1}{a}$ ie $a \neq j$ et $a \neq j^2$, (*) s'écrit :

$$\text{Arg}(z-a^2) - \text{Arg}\left(z - \frac{1}{a}\right) \equiv \text{Arg}\left(-1-a-a^2\right) - \text{Arg}\left(-1-a-\frac{1}{a}\right) \quad [\pi]$$

ie $\overrightarrow{A_3M}, \overrightarrow{A_2M} \equiv \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_2A_1}$ $[\pi]$

soit $\widehat{A_3M, A_2M} = \widehat{A_3A_1, A_2A_1}$ en angles de droites.

C'est la condition de cocyclicité ou d'alignement des points A_1, A_2, A_3, M.

Donc :

Γ est la droite (A_1A_2) si a est réel (Notons qu'alors $(A_1A_2) = (OI)$ est l'axe des abscisses)

Γ est le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ si $a \notin \mathbb{R}$. (*)

(*) A_1, A_2, A_3 alignés $\Leftrightarrow \text{Arg}(a^2+1+a) - \text{Arg}\left(\overbrace{\frac{1}{a}+1+a}^{\frac{1+a+a^2}{a}}\right) \equiv 0$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\, a \equiv 0$ $[\pi] \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

2ème méthode : Les points du plan d'affixes z, z', z'' sont alignés ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \bar{z} & \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} = 0$

(Ramis I

La condition d'alignement des points d'affixes 0, $\frac{1-az}{1-a}$, $\frac{z-a^2}{1-a}$ sera donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-az}{1-a} & \frac{z-a^2}{1-a} \\ 0 & \frac{1-\bar{a}\bar{z}}{1-\bar{a}} & \frac{\bar{z}-\bar{a}^2}{1-\bar{a}} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-az & z-a^2 \\ 0 & 1-\bar{a}\bar{z} & \bar{z}-\bar{a}^2 \end{vmatrix} = 0$$

Γ sera l'ensemble des pts $M(z)$ tels que :

$$(1-az)(\bar{z}-\bar{a}^2)-(1-\bar{a}\bar{z})(z-a^2)=0$$

$$2i\,\mathrm{Im}(1-az)(\bar{z}-\bar{a}^2)=0$$

$$\mathrm{Im}\left(\bar{z}-a|z|^2-\bar{a}^2+|a|^2\bar{a}z\right)=0$$

$$(*)\qquad -y-\beta|z|^2-2\alpha\beta+|a|^2(\alpha y-\beta x)=0 \qquad \text{en posant } \begin{cases} z=x+iy \\ a=\alpha+i\beta \end{cases}$$

D'où la discussion :

* <u>Si $\beta=0$</u>, ie $a\in\mathbb{R}$, $(*)$ devient $y(\alpha|a|^2-1)=0$ puis, comme $a=\alpha\in\mathbb{R}$, $y(a^3-1)=0$. $a\neq 1$ par hypothèse, donc $y=0$.

Γ sera l'axe des abscisses (OI).

* <u>Si $\beta\neq 0$</u>, ie $a\notin\mathbb{R}$, $(*)$ est l'équation du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ (puisque en remplaçant dans $(*)$ ou dans le déterminant, on voit sans peine que A_1, A_2, A_3 sont toujours dans Γ), d'équation :

$$x^2+y^2-|a|^2x+\frac{1-|a|^2\alpha}{\beta}y+2\alpha=0$$

($A_1A_2A_3$ alignés ssi $a\in\mathbb{R}$, d'après le calcul ⊛ de la 1ère méthode).

3.1 U adaptée $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ vérifie } U \\ M' \text{ semblable à } M \end{array} \right. \Rightarrow M' \text{ vérifie } U \Big\}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1z_1+\dots+u_nz_n=0 \\ \forall k\ z'_k=az_k+b \quad a,b\in\mathbb{C} \end{array} \right. \Rightarrow u_1z'_1+\dots+u_nz'_n=0 \Big\}$$

Comme $u_1z'_1+\dots+u_nz'_n=u_1(az_1+b)+\dots+u_n(az_n+b)=(u_1z_1+\dots+u_nz_n)a+b(u_1+\dots+u_n)$

on en déduit :

$$\boxed{U \text{ adaptée} \Leftrightarrow u_1+\dots+u_n=0}$$

3.2 * Si U est polygonale, $u_1 z_1 + \dots + u_n z_n = 0$ entraîne $u_1 z_2 + \dots + u_{n-1} z_n + u_n z_1 = 0$

Ainsi les noyaux des 2 formes linéaires

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto u_1 z_1 + \dots + u_n z_n \quad \text{et} \quad (z_1, \dots, z_n) \longmapsto u_1 z_2 + \dots + u_{n-1} z_n + u_n z_1$$

sont confondues. Il existe donc $\mu \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$u_1 = \mu u_n \quad u_2 = \mu u_1 \quad \dots \quad u_n = \mu u_{n-1}$$

Donc $u_1 = \mu^n u_1$. Comme $u_1 \neq 0$ (sinon $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$), on trouve $\boxed{\mu^n = 1}$

donc $\exists p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ $\mu = \omega^p$.

Par suite : $u_k = \mu u_{k-1} = \mu^2 u_{k-2} = \dots = \mu^{k-1} u_1 = \boxed{\lambda \omega^{p(k-1)}}$ si l'on pose $u_1 = \lambda$.

On a bien $p \neq 0$ sinon $u_1 = u_2 = \dots = u_n = \lambda \Rightarrow \lambda . n = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ absurde.

* Réciproquement, soit $u_k = \lambda \omega^{p(k-1)}$ où $1 \leq p \leq n-1$ $k \in \mathbb{N}_n$.

On a bien $u_1 + \dots + u_n = 0$ donc U est <u>adaptée</u>

et $u_1 z_1 + \dots + u_n z_n = 0 \Rightarrow \forall q \in \mathbb{N}$ $u_1 z_{1+q} + \dots + u_n z_{n+q} = \sum_{k=1}^{n} u_k z_{k+q} =$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} \omega^{p(k-1)} \underbrace{z_{k+q}}_{\ell} = \lambda \sum_{q+1}^{q+n} \omega^{p(\ell-q-1)} z_\ell = \lambda \omega^{-pq} \sum_{\ell=q+1}^{q+n} \omega^{p(\ell-1)} z_\ell = \lambda \omega^{-pq} \sum_{\ell=1}^{n} \omega^{p(\ell-1)} z_\ell = 0$$

(car $\omega^{n+k} = \omega^k$ et $z_{n+k} = z_k$)

<u>Conclusion</u> : U est polygonale d'ordre n.

* Comme $\lambda \neq 0$, il est évident qu'un n-point vérifie la relation U ssi il vérifie la relation U_p.

* <u>Si n = 2</u>, $\omega = -1$ et $z_1 - z_2 = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$ est la relation polygonale d'ordre 2.

* <u>Si n = 3</u>, $\omega = j$ et la relation polygonale d'ordre 3 s'écrit :

$$z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0 \quad \text{ou} \quad z_1 + j^2 z_2 + j z_3 = 0$$

Géométriquement, cela signifie que $M_1 M_2 M_3$ est un triangle équilatéral direct ou indirect (cf. 2.1).

* Si $n=4$, $\omega = i$ et la relation polygonale d'ordre 4 est, si $p=1$:

$$z_1 + i z_2 - z_3 - i z_4 = 0$$

d'où $z_1 - z_3 = i(z_4 - z_2) \Rightarrow M_1M_3 = M_2M_4$ et $\overrightarrow{M_2M_4}, \overrightarrow{M_3M_1} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Ainsi :

$M_1M_3 = M_2M_4$ et $\overrightarrow{M_2M_4}, \overrightarrow{M_3M_1} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $M_1 = M_3$ et $M_2 = M_4$

Si $p=2$, $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0 \iff M_1M_2M_3M_4$ parallélogramme

Si $p=3$, $z_1 - i z_2 - z_3 + i z_4 = 0$ ce qui signifie $z_1 - z_3 = i(z_2 - z_4)$ ie

$M_1M_3 = M_2M_4$ et $\overrightarrow{M_4M_2}, \overrightarrow{M_3M_1} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $M_1 = M_3$ et $M_2 = M_4$

3.3 Si $z_1 + \omega^p z_2 + \omega^{2p} z_3 + \dots + \omega^{(n-1)p} z_n = 0$ $\quad 1 \leq p \leq n-1$, $(z_1, \dots, z_n)$ sera solution du système de $n-1$ équations :

$$\begin{cases} z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 + \dots + \omega^{n-1} z_n = 0 \\ z_1 + \omega^2 z_2 + \omega^4 z_3 + \dots + \omega^{(n-1)2} z_n = 0 \\ \dots \\ z_1 + \omega^{n-1} z_2 + \omega^{(n-1)2} z_3 + \dots + \omega^{(n-1)(n-1)} z_n = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang $n-1$ car le déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-2} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & & \omega^{(n-2)2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)2} & & \omega^{(n-1)(n-2)} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\omega^j - \omega^i)$$ est non nul.

L'espace des solutions est donc une droite vectorielle. Comme celle-ci contient le n-uplet $(1, 1, \dots, 1)$ toute solution est de la forme $\lambda(1, 1, \dots, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, et le n-uplet est réduit à 1 "point" (l'invariance par permutation circulaire permet de définir la notion de n-point !!)

3.4 $\mathfrak{M} = (z_1, \dots, z_n)$ satisfait au système :

$$(I)\quad \begin{cases} z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 + \dots + \omega^{(n-1)} z_n = 0 \\ z_1 + \omega^2 z_2 + \omega^4 z_3 + \dots + \omega^{(n-1)2} z_n = 0 \\ \dots\dots \\ z_1 + \omega^k z_2 + \dots \quad] \text{ enlevée} \\ \dots\dots \\ z_1 + \omega^{n-1} z_2 + \dots + \omega^{(n-1)(n-1)} z_n = 0 \end{cases}$$

de $n-2$ équations à n inconnues. L'espace vectoriel des solutions sera de dimension 2 car la matrice du système est de rang $n-2$ comme on peut le voir en développant le déterminant de Vandermonde :

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-3} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{(n-3)2} \\ \dots & & & & \\ \hline \dots & & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)2} & \dots & \omega^{(n-3)(n-1)} \end{array} \right| \leftarrow \text{la ligne } 1\ \omega^k\ \omega^{2k} \dots \omega^{(n-3)k} \text{ ne figure pas.}$$

$n-2$

est égal à $\prod_{\substack{1 \le i < j \le n-1 \\ i,j \neq k}} (\omega^j - \omega^i) \neq 0$

$\Omega_{n-k} = (1, \omega^{n-k}, \omega^{2(n-k)}, \dots, \omega^{(n-1)(n-k)})$ est solution de (I) car $\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{pq} z_q = 0$ pour tout p. En effet :

$$\sum \omega^{pq} z_q = \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{pq}\, \omega^{q(n-k)} = \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q(p-k)} = 0$$ car ω^{p-k} est racine n-ième de l'unité distincte de 1.

Le n-point $\mathfrak{Z} = (1, 1, \dots, 1)$ étant toujours solution de (I), on en déduit que $(\Omega_{n-k}, \mathfrak{Z})$ constitue une base de l'e.v. des solutions et donc que toute solution $\mathfrak{M} = (z_1, \dots, z_n)$ de (I) s'écrit :

$$\mathfrak{M} = \alpha\, \Omega_{n-k} + \beta\, \mathfrak{Z} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ie $\mathfrak{M}$ semblable à Ω_{n-k}

ie $\mathfrak{M}$ est un n-point régulier du type ω^{n-k}

4.1 $S_a : (z_1,\dots,z_n) \mapsto (z'_1,\dots,z'_n)$ où $z'_k = \dfrac{z_k - a z_{k+1}}{1-a}$

$\forall N = (z'_1,\dots,z'_n)$ $\exists M = (z_1,\dots,z_n)$ $S_a(z_1,\dots,z_n) = (z'_1,\dots,z'_n)$

Il s'agit de résoudre le système en $z_1,\dots,z_n$:

$$\begin{cases} z_1 - a z_2 = (1-a) z'_1 \\ z_2 - a z_3 = (1-a) z'_2 \\ \vdots \\ z_n - a z_1 = (1-a) z'_n \end{cases}$$

de déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1-a & & & \\ & 1-a & 0 & \\ & & \ddots & -a \\ -a & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & & & 0 \\ & \ddots & & -a \\ & & & 1 \\ 0 & & & \end{vmatrix} + (-1)^n a \begin{vmatrix} -a & & & \\ 1-a & \ddots & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1-a & \end{vmatrix} = 1 + (-1)^n a \cdot (-a)^{n-1} = 1 - a^n$$

$1 - a^n \neq 0$ donc ce système de Cramer admet un unique n-uplet $(z_1,\dots,z_n)$ solution et S_a est bijective.

4.2 On doit prouver que :

$$z_1 + \omega^p z_2 + \dots + \omega^{(n-1)p} z_n = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_1 + \omega^p z'_2 + \dots + \omega^{(n-1)p} z'_n = 0$$

où $z'_k = \dfrac{z_k - a z_{k+1}}{1-a}$.

On calcule :

$$z'_1 + \omega^p z'_2 + \dots + \omega^{(n-1)p} z'_n = \frac{1}{1-a}\left(z_1 + \omega^p z_2 + \dots + \omega^{(n-1)p} z_n - a\underbrace{(z_2 + \omega^p z_3 + \dots + \omega^{(n-1)p} z_1)}_{\sum_{k=2}^{n+1} \omega^{(k-2)p} z_k = \omega^{(n-1)p} \sum_{k=2}^{n+1} \omega^{p(k-1)} z_k} \right)$$

où $z_{n+1} = z_1$

$$= \omega^{(n-1)p} \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega^{p(k-1)} z_k$$

d'où :

$$\boxed{z'_1 + \omega^p z'_2 + \dots + \omega^{(n-1)p} z'_n = \frac{1 - a\omega^{(n-1)p}}{1-a}(z_1 + \omega^p z_2 + \dots + \omega^{(n-1)p} z_n)}$$

Cette identité prouve 4.2 et du même coup 4.4.

NB : Cette formule prouve aussi que, pour tout $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$:

Si $S_a(M) = N$, alors M vérifie $U_p \Leftrightarrow N$ vérifie U_p

4.3 * $\forall m$ $S_{\omega^p}(m)$ vérifie la relation U_p :

$S_{\omega^p}(m) = (z'_1, \dots, z'_n)$ où $z'_k = \dfrac{z_k - \omega^p z_{k+1}}{1-\omega^p}$ et $1 \le p \le n-1$, vérifie U_p ssi $\sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)p} z'_k = 0$.

On a : $\sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)p} z'_k = \dfrac{1}{1-\omega^p} \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)p} z_k - \omega^{kp} z_{k+1} = \dfrac{1}{1-\omega^p} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)p} z_k - \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} \underbrace{z_{k+1}}_{k'} \right)$

$= \dfrac{1}{1-\omega^p} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)p} z_k - \sum_{k=2}^{n+1} \omega^{(k-1)p} z_k \right) = \dfrac{1}{1-\omega^p} (z_1 - \omega^{pn} z_1) = 0$

car $\omega^n = 1$.

* $n = (z'_1, \dots, z'_n)$ vérifie la relation U_p. Cherchons m tel que $S_{\omega^p}(m) = n$:

Notons $m = (z_1, \dots, z_n)$. Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} z_1 - \omega^p z_2 = (1-\omega^p) z'_1 \\ z_2 - \omega^p z_3 = (1-\omega^p) z'_2 \\ \dots \\ z_n - \omega^p z_1 = (1-\omega^p) z_n \end{cases}$$

à n inconnues et n équations.

Le déterminant de ce système est nul (on l'a déjà calculé en) :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega^p & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -\omega^p \\ -\omega^p & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 - (\omega^p)^n = 0$$

Ce système est de rang $n-1$ car $\begin{vmatrix} 1 & -\omega^p & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\omega^p \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

La condition de compatibilité sera donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega^p & & 0 & (1-\omega^p) z'_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\omega^p & \\ 0 & & & 1 & (1-\omega^p) z'_{n-1} \\ -\omega^p & 0 & \cdots & 0 & (1-\omega^p) z'_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ie} \quad \begin{vmatrix} 1 & -\omega^p & & 0 & z'_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\omega^p & z'_{n-2} \\ 0 & & & 1 & z'_{n-1} \\ -\omega^p & 0 & \cdots & 0 & z'_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

C'est elle que l'on doit vérifier.

(*) s'écrit : $z'_n + (-1)^{n+1}(-\omega^p)\begin{vmatrix} -\omega^p & 0 & z'_1 \\ 1 & \ddots & \\ & -\omega^p & \\ 0 & 1 & z'_{n-1} \end{vmatrix} = 0$

Calculons $D(b_1,\dots,b_n,a) \doteq \begin{vmatrix} a & 0 & b_1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & a & b_{n-1} \\ 0 & 1 & b_n \end{vmatrix} = a \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b_2 \\ 1 & \ddots & \\ & a & b_n \\ 0 & 1 & \end{vmatrix}}_{D(b_2,\dots,b_n,a)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 1 & a & & 0 & b_3 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a & b_n \end{vmatrix}}_{(-1)^n b_1}$

$$D(b_1,\dots,b_n,a) = (-1)^{n+1} b_1 + a\,D(b_2,\dots,b_n,a)$$
$$= (-1)^{n+1} b_1 + a(-1)^n b_2 + a^2 D(b_3,\dots,b_n,a)$$
$$= (-1)^{n+1} b_1 + a(-1)^n b_2 + a^2(-1)^{n-1} b_3 + \dots + a^{n-2}\underbrace{D(b_{n-1},b_n,a)}_{\begin{vmatrix} a & b_{n-1} \\ 1 & b_n \end{vmatrix} = ab_n - b_{n-1}}$$

Finalement :

$$D(b_1,\dots,b_n,a) = (-1)^{n+1} b_1 + (-1)^n a b_2 + (-1)^{n-1} a^2 b_3 + \dots - a^{n-2} b_{n-1} + a^{n-1} b_n$$

$$\boxed{D(b_1,\dots,b_n,a) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+2-k} a^{k-1} b_k}$$

La condition de compatibilité (*) s'écrira donc :

$$(*) : \quad z'_n + (-1)^{n+1}(-\omega^p)\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{(n-1)+2-k} (-\omega^p)^{k-1} z'_k\right) = 0$$

$$z'_n + \omega^p \sum_{k=1}^{n-1} \omega^{(k-1)p} z'_k = 0$$

Par hypothèse, $\mathcal{N} = (z'_1,\dots,z'_n)$ vérifie la relation U_p, i.e $\sum_{k=1}^{n-1} \omega^{(k-1)p} z'_k = -\omega^{(n-1)p} z'_n$

et (*) devient :

$$z'_n + \omega^p\left(-\omega^{(n-1)p} z'_n\right) = 0 \quad \text{qui est vraie puisque } \omega^n = 1.$$

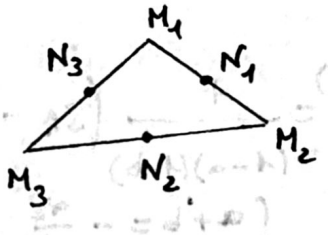
CQFD

4.5 $S_{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{N} \Leftrightarrow \forall k \quad z'_k = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}$

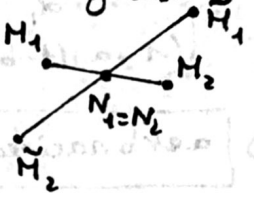
S_{-1} est l'application qui au n-point $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_n)$ associe le n-point $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_n)$ tel que N_k soit le milieu de $[M_k M_{k+1}]$.

* Si n est impair, $(-1)^n \neq 1$ et le 4.1 montre que S_{-1} est bijective.

Ainsi pour $n = 3$, on a :



* Si n est pair, ce n'est pas toujours une bijection comme le montre le contre-exemple : $n = 2$



Posons $n = 2p$. On a $(-1)^n = 1$ et si $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $\omega^p = -1$ et $S_{-1} = S_{\omega^p}$.
Le 4.3 montre que $\operatorname{Im} S_{-1} = \{ \mathcal{N} \,/\, \mathcal{N} \text{ vérifie la relation } U_p \}$.
Ainsi, $\mathcal{N} = (z_1, \dots, z_n)$ est dans $\operatorname{Im} S_{-1}$ ssi $z_1 + \omega^p z_2 + \omega^{2p} z_3 + \dots + \omega^{(n-1)p} z_n = 0$
ie $z_1 - z_2 + z_3 - \dots + (-1)^{n-1} z_n = 0$.

4.6 * D'après 4.2 et 4.3, l'image d'un n-point par $S_\omega, S_{\omega^2}, \dots, S_{\omega^{n-1}}$ vérifie chacune des relations U_p $(1 \leq p \leq n-1)$. Cette image est donc réduite à un point d'après 3.3.

* Si on fait agir les composées des S_{ω^p} pour $1 \leq p \leq n-1$ et $p \neq k$, l'image d'un n-point vérifie toutes les relations U_p sauf U_k. D'après 3.4 cette image est un n-point régulier de type ω^{n-k}

NB : Cette image sera réduite à un point ssi le n-point initial vérifie U_k.

V **5.1** Si $p = 2$ N_k barycentre de M_k, M_{k+1} affectés de α_1, α_2 ie $z'_k = \frac{\alpha_1 z_k + \alpha_2 z_{k+1}}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{z_k + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z_{k+1}}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$

donc $\boxed{T(\alpha_1, \alpha_2) = S_{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}$

5.2 * Si $p=3$, N_k barycentre de M_k, M_{k+1}, M_{k+2} affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\beta'_k = \frac{\alpha_1 \beta_k + \alpha_2 \beta_{k+1} + \alpha_3 \beta_{k+2}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \frac{\beta_k + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_{k+1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\beta_{k+2}}{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}$$

Et on a calculé au 1.2 :

$$S_a \circ S_b(\beta_k) = \frac{S_b(\beta_k) - a\, S_b(\beta_{k+1})}{1-a} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}\left(\beta_k - (a+b)\beta_{k+1} + ab\,\beta_{k+2}\right)$$

Donc $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = S_a \circ S_b \iff \begin{cases} a+b = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ ab = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ (1-a)(1-b) = 1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ ab = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \end{cases}$

$\iff$ **a et b racines de $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_3 = 0$**

* CNS pour que $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ soit bijective :

Si $a^n \neq 1$ et $b^n \neq 1$, S_a et S_b sont bijectives d'après 4.1, et $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = S_a \circ S_b$ sera bijective.

Si $a^n = 1$ ou $b^n = 1$, par ex. $a^n = 1$, 4.2 et 4.3 montre que l'image de tout n-point $\mathcal{M}$ par $S_a \circ S_b$ vérifie la relation U_p (pour p convenable), donc que $S_a \circ S_b = T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ n'est pas bijective.

Ccl : **$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ bijective $\iff$ les racines a et b de $\alpha_1 X^2+\alpha_2 X+\alpha_3=0$ vérifient $a^n \neq 1$ et $b^n \neq 1$**

$\iff$ **$\alpha_1 X^2+\alpha_2 X+\alpha_3$ et X^n-1 sont premiers entre eux.**

2e méthode : 4.1 et 4.3 montrent que :

S_a bijective $\iff$ S_a injective $\iff$ S_a surjective

Par suite $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = S_a \circ S_b$ bijective $\iff$ S_a et S_b bijectives

$\iff$ $a^n \neq 1$ et $b^n \neq 1$

* $T\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = S_a \circ S_b$ où a et b sont les racines de $X^2+X+1=0$ ie $a=j$ et $b=j^2$.

D'après ce qui précède :

$$T\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ bijective} \iff j^n \neq 1 \text{ et } j^{2n} \neq 1 \iff n \not\equiv 0 \ [3].$$

Si $n=3k$, $j=\omega^k$ et $j^2=\omega^{2k}$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3k}}$, de sorte que

$$T\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = S_{\omega^k} \circ S_{\omega^{2k}}$$

L'image de $S_{\omega^k} \circ S_{\omega^{2k}}$ sera l'ensemble des n-points vérifiant U_k et U_{2k} (cf 4.3 et la NB. du 4.2 montrant que si $S_a(m)=n$, alors m vérifie $U_p \Leftrightarrow n$ vérifie U_p)

5.3 On généralise la formule du **5.2** :

Soit : $P(X) = \alpha_1 X^{p-1} + \alpha_2 X^{p-2} + \dots + \alpha_p = \alpha_1 (X-a_1)\dots(X-a_{p-1})$

* Si $\sigma_s(b_1,\dots,b_q)$ = s-ième poly. sym. élémentaire de $b_1,\dots,b_q \doteq \sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le q} b_{i_1}\dots b_{i_s}$,

on sait que $\sigma_s(a_1,\dots,a_{p-1}) = (-1)^s \dfrac{\alpha_{p-1-s}}{\alpha_1}$.

* Par définition : $T(\alpha_1,\dots,\alpha_p)(z_k) = \dfrac{\alpha_1 z_k + \alpha_2 z_{k+1} + \dots + \alpha_p z_{k+p-1}}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p}$

* Calcul de $S_{b_1} \circ S_{b_2} \circ \dots \circ S_{b_q}(m) \doteq (N_1^{(q)},\dots,N_n^{(q)})$ où $N_k^{(q)}$ d'affixe $z_k^{(q)}$

Montrons par récurrence sur q, que :

$$\boxed{z_k^{(q)} = \frac{z_k - \sigma_1(b_1,\dots,b_q) z_{k+1} + \sigma_2(b_1,\dots,b_q) z_{k+2} + \dots + (-1)^s \sigma_s(b_1,\dots,b_q) z_{k+s} + \dots + (-1)^q \sigma_q(b_1,\dots,b_q) z_{k+q}}{(1-b_1)\dots(1-b_q)}}$$

La formule est vraie pour $q=2$ (voir 5.2) et au rang $q+1$:

$$z_k^{(q+1)} = \frac{z_k^{(q)} - b_{q+1} z_{k+1}^{(q)}}{1-b_{q+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-b_1)\dots(1-b_{q+1})}\Big[z_k + \overbrace{\left(-\sigma_1(b_1,\dots,b_q) - b_{q+1}\right)}^{-\sigma_1(b_1,\dots,b_{q+1})} z_{k+1} + \dots + \overbrace{\left((-1)^s \sigma_s(b_1,\dots,b_q) - b_{q+1}(-1)^{s-1}\sigma_{s-1}(b_1,\dots,b_q)\right)}^{(-1)^s \sigma_s(b_1,\dots,b_{q+1})} z_{k+s} + \dots$$

$$+ \underbrace{-(-1)^q \sigma_q(b_1,\dots,b_q)\, b_{q+1}}_{+(-1)^{q+1}\sigma_{q+1}(b_1,\dots,b_{q+1})} z_{k+q+1} \Big]$$

La récurrence aboutit.

* Il suffit maintenant d'appliquer ce qui précède :

$$S_{a_1} \circ \dots \circ S_{a_{p-1}}(3_k) = \frac{3_k + \sum_{\delta=1}^{p-1} (-1)^\delta \overbrace{\sigma_\delta(a_1, \dots, a_{p-1})}^{\frac{\alpha_{p-1-\delta}}{\alpha_1}} 3_{k+\delta}}{(1-a_1)\dots(1-a_{p-1})}$$

$$= \frac{3_k + \sum_{\delta=1}^{p-1} \frac{\alpha_{p-1-\delta}}{\alpha_1} 3_{k+\delta}}{\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)} = \frac{\alpha_1 3_k + \alpha_2 3_{k+1} + \dots + \alpha_p 3_{k+p-1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_p}$$

$$= T(\alpha_1, \dots, \alpha_p)(3_k) \quad \text{oui.}$$

* Ainsi, comme en 5.2 :

$$\boxed{T(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \text{ bijectif} \iff \forall i \; a_i^n \neq 1 \iff P(X) \wedge X^n - 1 = 1}$$

* En particulier $T\left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$ est bijectif ssi $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$ et $X^n - 1$ sont premiers entre eux.

Gr :

$$(X-1)\left((X^n-1) \wedge (X^{p-1} + \dots + X + 1)\right) = \left((X-1)(X^n-1)\right) \wedge (X^p - 1) = (X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^\delta - 1$$

où $\delta = n \wedge p$

entraîne que $(X^n - 1) \wedge (X^{p-1} + \dots + X + 1) = \dfrac{X^\delta - 1}{X - 1}$

Par suite $\boxed{T\left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right) \text{ bijectif} \iff n \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux.}}$

NB : Si $n \wedge p = \delta > 1$, les racines communes à $X^n - 1$ et $X^{p-1} + \dots + X + 1$ sont les racines δ-ième de 1 distinctes de 1, ie les nombres :

$$\omega^{\frac{n}{\delta}}, \omega^{2\frac{n}{\delta}}, \dots, \omega^{(\delta-1)\frac{n}{\delta}}$$

L'image de $T\left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$ est donc formée des n-points vérifiant les relations $U_{\frac{n}{\delta}}, U_{2\frac{n}{\delta}}, \dots, U_{(\delta-1)\frac{n}{\delta}}$ (utiliser la NB du 4.2, $\overset{4.1}{\vee}$ 4.2 et 4.3)